54. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 9 und 10
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Jahrgangsstufen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

541011

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(-1, 0)$ und $B(3, 0)$ sowie der Graph g der linearen Funktion $y = f(x) = \frac{4}{5}x$. Der Punkt Q liege so auf g, dass ABQ gleichschenklig ist.

a) Bestimmen Sie für eine mögliche Lage von Q die Koordinaten!

b) Wie viele verschiedene Punkte gibt es, an denen Q liegen kann?
Weisen Sie die Korrektheit der von Ihnen gefundenen Anzahl nach!

c) Wie kann man mit Zirkel und Lineal die in Teil b) gezählten Punkte konstruieren? (Grundkonstruktionen wie Mittelsenkrechte, Parallele oder Winkelhalbierende dürfen direkt benutzt und müssen nicht beschrieben werden.)

Hinweis: Eine praktisch durchgeführte Konstruktion gemäß Teil c) genügt nicht als Nachweis der Richtigkeit der in Teil b) gefragten Anzahl. In Teil b) wird – wie in der Mathematik üblich – ein logischer Beweis verlangt.

541012

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussage:

Wenn man aus der Menge $M = \{1, 2, \ldots, 3279\}$ acht verschiedene Zahlen beliebig auswählt, dann gibt es unter diesen Zahlen stets zwei Zahlen a, b, für die $1 < \frac{a}{b} \leq 3$ gilt.

Hinweis: Das *Schubfachprinzip* (auch Taubenschlag-Prinzip) ist ein wichtiges mathematisches Beweisprinzip. In seiner einfachsten Form sagt es über 10 Taubenschläge Folgendes aus: Sind in den Taubenschlägen 11 Tauben, so halten sich in wenigstens einem Taubenschlag zwei Tauben auf. In seiner allgemeineren Form kann man für 51 Tauben folgern, dass sich in einem Taubenschlag sechs Tauben aufhalten. Überlegen Sie, wie sich dieses Prinzip für obige Aufgabe anwenden lässt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

541013

Seien x, y und z ganze Zahlen. Weiter gelte $0 < x < y^3$ und $x + y^3 = z^3$.

Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Wert von $y + z$ für alle derartigen Tripel (x, y, z).

541014

Bert versucht, die Seitenflächen eines Würfels so mit Zahlen u (unten), o (oben), r (rechts), l (links), v (vorn) und h (hinten) zu beschriften, dass die zwölf Absolutbeträge der Differenzen von Zahlen benachbarter Seitenflächen gerade die natürlichen Zahlen von 1 bis 12 ergeben.

a) Finden Sie eine solche Beschriftung!

b) Weisen Sie nach, dass die Zahl 17 das größte mögliche Ergebnis ist, welches bei einer solchen Beschriftung als Differenz von Zahlen zweier gegenüberliegender Seitenflächen auftreten kann.

541015

Bei einem Marathonlauf nehmen mehrere Sportler teil. Jedem Sportler soll dabei eine Startnummer zugeordnet werden, die eine ganze Zahl größer als 1 ist. Keine zwei Sportler sollen die gleiche Startnummer erhalten.

Die Startnummern sollen dabei so gewählt werden, dass die Startnummern je zweier Teilnehmer dann und nur dann teilerfremd sind, wenn sich die beiden Teilnehmer nicht gegenseitig kennen.

Man zeige, dass dies möglich ist,

a) wenn jeder jeden kennt,

b) wenn keiner einen anderen kennt,

c) wenn sie sich so in einer Reihe aufstellen, dass jeder nur seine unmittelbaren Nachbarn kennt (freilich haben die zwei äußeren Teilnehmer dieser Aufstellung dann nur einen Nachbarn),

d) wenn fünf Sportler am Lauf teilnehmen und zwei Teilnehmer T_1 und T_2 jeweils die anderen Teilnehmer T_3, T_4 und T_5 kennen, aber alle anderen sich untereinander nicht kennen.

e) Zeigen Sie, dass eine Startnummernvergabe entsprechend der Aufgabenstellung auch in jedem anderen Fall möglich ist.

Hinweis: In der Aufgabe wird – im Gegensatz zu einem Musikstar, den alle kennen, der aber selbst nur wenige seiner Fans kennt – davon ausgegangen, wenn Teilnehmer T_1 Teilnehmer T_2 kennt, dass dann auch Teilnehmer T_2 Teilnehmer T_1 kennt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

541016

Gegeben seien ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und auf der Kreislinie zwei Punkte A und B, die mit M ein Dreieck ABM bilden.

Weiter sei D der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und M' der Schwerpunkt des Dreiecks ABM.

a) C sei der Punkt auf der Kreislinie, für den das Dreieck ABC ein spitzwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$ ist, und S der Schwerpunkt dieses Dreiecks. Zeigen Sie, dass die Punkte C, S, M und M' auf einer Geraden liegen und $|MC| = 3 \cdot |M'S|$ gilt.

b) X sei ein beliebiger Punkt auf der Kreislinie und T der Schwerpunkt des Dreiecks ABX. Zeigen Sie, dass alle diese Schwerpunkte T auf einer Kreislinie um M' liegen.

Hinweis: Der Schwerpunkt S eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und teilt diese im Verhältnis $2 : 1$.